Notes: Differential Manifolds

Guan Luo *

Tsinghua University

该文章是看 An Introduction to Manifolds [1] 的学习笔记。

1 Euclidean Spaces

欧氏空间是所有流形的原型。其特殊之处在于包含一套标准的全局坐标。使得在 $\mathbb{R}^n$ 上的所有构造都可以用标准坐标来定义，但这也混淆了哪些概念是流形内在蕴含的。普遍的流形定义是没有标准坐标的，因此只有独立于坐标的概念在流形上才有意义。本章的目的在于把 $\mathbb{R}^n$ 上的微积分转泛化到坐标独立的定义。如，将切线向量定义为一个函数的微分，而非全局坐标下的方向或者一列数字。本章核心的两个概念：楔积 (wedge product) 和外导数 (exterior derivative).

1.1 Definitions

$\mathcal{C}^k$: 一个函数 $f: U \to \mathbb{R}$ 被认为在 p 点 k-阶连续可微，如果其微分 1在 p 点存在且连续，其中 $j \leq k$。

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}} \tag{1}$$

$\mathcal{C}^\infty$: 一个函数对于任意 k，都是 $\mathcal{C}^k$ 的，通常认为 “smooth” 和 “$\mathcal{C}^\infty$” 是等价的。

实解析 (real-analytic): 一个函数 f 在 p 点是实解析的，如果在其邻域内等于函数在 p 点的泰勒级数，即式 3。显然，一个实解析的函数必然是 $\mathcal{C}^\infty$，但反之未必，如 4。

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)(x^i - p^i)(x^j - p^j) \tag{2}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(p)(x^{i_1} - p^{i_1}) \cdots (x^{i_k} - p^{i_k}) + \cdots \tag{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

1.2 Taylor's Theorem with Remainder

Star-shaped: 在 p 点的邻域，且该集合内任意点 x，p 和 x 的连线段都在集合内。

Theorem: 设 f 在关于 p 点的 star-shaped 集合 U 内是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则存在函数 $g_1(x), \ldots, g_n(x) \in \mathcal{C}^\infty(U)$，使得 5成立。

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{5}$$

*lg22@mails.tsinghua.edu.cn

其中，函数 $g_i(x)$ 的定义如 6所示。

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))dt \tag{6}$$

不妨令 $n = 1$ 和 $p = 0$，则上式 5简化如下，且 g 函数同样满足 $\mathcal{C}^\infty$，则可以同样进行展开

$$f(x) = f(0) + xg_1(x),\ \ g_i(x) = g_i(0) + xg_{i+1}(x) \tag{7}$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x(g_1(0) + xg_2(x)) \\ &= f(0) + xg_1(0) + x^2(g_2(0) + xg_3(x)) \\ &= f(0) + g_1(0)x + g_2(0)x^2 + \cdots + g_i(0)x^i + g_{i+1}(x)x^{i+1} \end{aligned}$$

反复进行微分可得

$$g_k(0) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0),\ \ k = 1, 2, ..., i$$

1.3 Tangent Vectors as Derivatives

Directional Derivatives: 设一条线穿过 $p = (p^1, ..., p^n)$，方向为 $v =< v^1, ..., v^n >$，则有线上的点参数化为 $c(t) = (p^1 + tv^1, ..., p^n + tv^n)$，对于 p 点邻域内的光滑函数 f，其方向导数的定义如 8。

$$D_v f = \lim_{t\to 0}\frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(c(t)) \tag{8}$$

根据链式法则，我们可知

$$D_v f = \sum_{[} i = 1]^n \frac{dc^i}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{9}$$

因此，方向 v 在 p 点上定义了一个对于函数 f 的操作。

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{10}$$

这种将方向 v 映射方向导数 D_v 提供了一种将切线方向描述为函数算子的方式。

1.4 Germs of Functions

equivalence relation: 在 S 上的等价关系是 $S \times S$ 的子集，满足自反性、对称性和传递性。
algebra: 算数是定义在域 K 上的向量空间 A，且有乘法定义。

$$\mu : A \times A \to A \tag{11}$$

且满足结合律、分配律和同质律，即对于 $a, b, c \in A, r \in K$，有

$$\begin{aligned} &(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \\ &(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \\ &r(a\cdot b) = (ra)\cdot b = a\cdot(rb) \end{aligned}$$

linear map: 定义在域 K 上，从向量空间 V 到 W 的映射 L 满足对于 $r \in K, u, v \in V$

$$L(u+v) = L(u) + L(v), L(rv) = rL(v) \tag{12}$$

algebra homomorphism: 定义在域 K 的 algebra 上的线性映射 $L : A \to A'$，且满足算数乘法 $L(ab) = L(a)L(b), a, b \in A$。

1.5 Derivations at a Point

对于 p 点任意切向量 v，方向导数提供了一个将 $\mathcal{C}^\infty$ 函数到实数的映射 $D_v : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$。根据定义 10，方向导数是线性映射，且满足莱布尼茨规则 13。

$$D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)(D_v g) \tag{13}$$

通常来说，任何线性映射 $D_v : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$ 且满足莱布尼茨 13被称为 p 点上的微分，将 p 点上所有微分组成的集合表示为 $D_p(\mathbb{R}^n)$，该集合实际上为实向量空间，由于任意两个微分的和、和常量的乘法仍为 p 点上的微分。至此我们知道方向导数是切线空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 到微分空间 $D_p(\mathbb{R}^n)$ 的线性映射。

$$\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \to D_p(\mathbb{R}^n), v \mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{14}$$

以下我们证明从切线空间到微分空间映射是双射，只需要证明任意微分都可以映射回方向即可。根据定义 5和莱布尼茨规则 13可得

$$Df(x) = D(f(p) + \sum (x^i - p^i) g_i(x)) = \sum (Dx^i) g_i(p) + \sum (p^i - p^i) D g_i(x) = \sum (Dx^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{15}$$

从而可得 $D = D_v$ 对于 $v =< Dx^1, ..., Dx^n >$。上述定理说明在 p 点的切线向量和微分是一一对应的，在切线空间的标准基展开可以对应为微分上展开

$$v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{16}$$

1.6 Vector Fields

由于切向量空间 $T_p(R^n)$ 有基 $\{\partial/\partial x^i|_p\}$，任何切向量都可以表示成线性组合。

$$X_p = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \tag{17}$$

我们认为如果系数 a^i 在子集 U 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则向量域在 U 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 的。

Multiplication: 函数和向量域的乘法定义为逐点的乘法。$(fX)_p = f(p)X_p$，如果向量域是 $\mathcal{C}^\infty$，函数 f 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的，则 $fX = \sum (fa^i)\partial/\partial x^i$ 是 $\mathcal{C}^\infty$。

$\mathfrak{F}(U)$: 开集上所有 $\mathcal{C}^\infty$ 函数的环组成的集合。

$\mathfrak{X}(U)$: 开集上所有 $\mathcal{C}^\infty$ 向量域组成的集合。

R-module: R 是一个可交换环，则左 R-module 是一个带常量乘法映射的阿贝尔群，满足结合律、有单位元、分配律，即对于 $r, s \in R, a, b \in A$。

$$(rs)a = r(sa), 1a = a, (r + s)a = ra + sa, r(a + b) = ra + rb \tag{18}$$

R-module homomorphism: 设 A 和 A' 是 R-modules，则同态是从 A 到 A' 的映射 $f : A \to A'$，同时保留了加法和常量乘法，即对于 $a, b \in A, r \in R$。

$$f(a + b) = f(a) + f(b), f(ra) = rf(a) \tag{19}$$

1.7 Vector Fields as Derivations

我们定义向量域的导数为 Xf，对于 $\mathcal{C}^\infty$ 的向量域 X 和函数 f,$(Xf)(p) = X_p f$，由 $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$，我们得到

$$(Xf)(p) = \sum a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \tag{20}$$

上式 20说明了 Xf 同样是 $\mathcal{C}^\infty$ 的函数，且存在 $R - linear$ 映射 $f \mapsto Xf$，显然该操作的莱布尼茨规则如下。

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \tag{21}$$

如果 A 是域 K 上的算数，则在 A 上的导数是 K-linear 映射 D，使得

$$D(ab) = (Da)b + aDb \text{ for all } a, b \in A \tag{22}$$

由于 A 上的导数在加法和常量乘法下封闭，因此组成集合表示为 $\text{Der}(A)$，因此一个 $\mathcal{C}^\infty$ 上的向量域生成了一个算数 $\mathcal{C}^\infty(U)$ 上的导数，即

$$\varphi : \mathfrak{X}(U) \to \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(U)), X \mapsto (f \mapsto Xf) \tag{23}$$

正如所有切线向量可以表示为逐点的导数 (一个从 $\mathcal{C}^\infty$ 到 $\mathcal{R}$ 的映射)，向量域可以表示为算数 $\mathcal{C}^\infty$ 的导数 (一个从 $\mathcal{C}^\infty$ 到 $\mathcal{C}^\infty$ 的映射)。

1.8 The Exterior Algebra of Multicovectors

multicovectors of degree k(k-covectors): 具有 k 个自变量的多元线性函数，其自变量间具有反对称性或者交替性质，即交换两个自变量的顺序，函数的符号会改变，常见的如矩阵的行列式和向量的叉积。
wedge product: 楔积是叉积在 n 维向量空间的共向量操作的泛化。
Hom(V, W): 如果 V 和 W 均为实向量空间，我们用 $\text{Hom}(V, W)$ 表示所有线性映射 $f : V \to W$ 的集合。
dual space: 设 V 是实向量空间，其对偶空间 $V^\vee$ 定义为 $V^\vee = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$，对偶空间的元素被称为向量空间 V 上的 covectors 或者 1-covectors。
dual space basis: 以后假设 V 是有限实向量空间，其一组基为 $e_1, ..., e_n$，则任意元素可以唯一表示为线性组合 $v = \sum v^i e_i, v^i \in \mathbb{R}$，设 $\alpha^i : V \to \mathbb{R}$ 为线性映射选取出第 i 个坐标，即 $\alpha^i(v) = v^i$，则 $\alpha^1, ..., \alpha^n$ 构成了对偶空间的一组基。进一步的说明有限维向量空间和其对偶空间的维度相同。
证明: 对于任意线性函数 $f \in V^\vee$ 和 $v = \sum v^i e_i \in V$，有

$$f(v) = \sum v^i f(e_i) = \sum f(e_i)\alpha^i(v) \Rightarrow f = \sum f(e_i)\alpha^i$$

且这组线性函数间相互独立，设 $\sum c_i\alpha^i = 0$，则分别施加向量 e_j，有

$$0 = \sum_i c_i\alpha^i(e_j) = \sum_i c_i\delta^i_j = c_j, j = 1, ..., n$$

permutation: 一个转置 σ 是在集合 $A = \{1, ..., k\}$ 上的重排序映射满足 $\sigma : A \to A$，循环转置若满足 $\sigma(a_1) = a_2, ..., \sigma(a_r) = a_1$，并保持其余元素不变，则称为 r-cycle，一般的转置可以表示为

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

the sign of permutation: 转置的符号由其分解得到的不相交的循环转置的个数决定，奇数为-1，偶数为+1，记录一个转置后对应序列的逆序数为 # inversions，则有

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{ inversions}},\ \text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$$

1.9 Multilinear Functions

k-linear(k-tensor): 用 $V^k = V \times V \times \cdots \times V$ 表示 k 个相同实向量空间的笛卡尔积，一个函数 $f : V^k \to \mathbb{R}$ 被称为 k-linear 如果对 k 个自变量中的任意变量满足线性条件，所有在 V 上的 k-tensors 记为 $L_k(V)$，k 为函数 f 的度 (degree)。例如两个向量的点乘是 bilinear 的，n 维矩阵的行列式 (看成一个函数作用在 n 个列向量) 是 n-linear 的。

$$f(..., av + bw, ...) = af(..., v, ...) + bf(..., w, ...), a, b \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

symmetric of k-linear function: 一个 k-linear 的函数被称为是对称如果满足

$$f(\nu_{\sigma(1)},...,\nu_{\sigma(k)}) = f(\nu_1,...,\nu_k)$$

alternating of k-linear function: 一个 k-linear 的函数被称为是交换如果满足

$$f(\nu_{\sigma(1)},...,\nu_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)f(\nu_1,...,\nu_k)$$

alternating k-tensors(k-covectors): 在向量空间 V 上所有可交换的 k-linear 函数组成的空间, 记为 $A_k(V)$, $A_0(V)$ 为 $\mathbb{R}$。

permutation action on multilinear functions: 设 f 是一个向量空间 V 上的一个 k-linear 函数, σ 是 S_k 中的一个转置，则定义一个新的 k-linear 的函数 σf 为

$$(\sigma f)(v_1,...,v_k) = f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})$$

对于任意转置 $\sigma\in S_k$，若 f 是对称的，则有 $\sigma f = f$，若 f 是可交换的，则有 $\sigma f = (\text{sgn}\,\sigma)f$，若只有一个自变量，则转置群是单位群，1-linear 函数既是对称也是可交换的，即 $A_1(V) = L_1(V) = V^\vee$。
对于转置 $\sigma,\tau\in S_k$，f 是 V 上的 k-linear 函数，则有 $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma)f$。

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma f)(v_1,...,v_k) &= (\sigma f)(v_{\tau(1)},...,v_{\tau(k)}) \\
&= (\sigma f)(w_1,...,w_k) \ \text{ letting } w_i = v_{\tau(i)} \\
&= f(w_{\sigma(1)},...,w_{\sigma(k)}) \\
&= f(v_{\tau(\sigma(1))},...,v_{\tau(\sigma(k))}) = f(v_{(\tau\sigma)(1)},...,v_{(\tau\sigma)(k)}) \\
&= (\tau\sigma)f(v_1,...,v_k)
\end{aligned}$$

left action: 对于群 G 和集合 X，一个映射 $G\times X\to X, (\sigma,x)\mapsto\sigma\cdot x$ 被称为左作用如果 (e 是单位元素)

$$e\cdot x = x, \tau\cdot(\sigma\cdot x) = (\tau\sigma)\cdot x, \tau,\sigma\in G, x\in X$$

在这种语境下，转置群 S_k 对向量空间 V 上的 k-linear 函数集 $L_k(V)$ 同样是一种左作用。
right action: 类似于左作用的定义，一个对于群 G 和集合 X 的映射 $X\times G\to X$ 使得

$$x\cdot e = x, (x\cdot\sigma)\cdot\tau = x\cdot(\sigma\tau), \tau,\sigma\in G, x\in X$$

1.10 Symmetrizing and Alternating Operators

设 f 是向量空间 V 上的 k-linear 函数，则可以根据 f 构造对称函数 Sf 和可交换的函数 Af，定义如下

$$\begin{aligned}
(Sf)(v_1,...,v_k) &= \sum_{\sigma\in S_k}\sigma f = \sum_{\sigma\in S_k} f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)}) \\
(Af)(v_1,...,v_k) &= \sum_{\sigma\in S_k}(\text{sgn}\sigma)\sigma f = \sum_{\sigma\in S_k}(\text{sgn}\sigma)f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})
\end{aligned}$$

以下证明 Af 是可交换的 k-linear 函数。

$$\tau(Af) = \sum_{\sigma\in S_k}(\text{sgn}\sigma)\tau(\sigma f) = \sum_{\sigma\in S_k}(\text{sgn}\sigma)(\tau\sigma)f = (\text{sgn}\tau)\sum_{\sigma\in S_k}(\text{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)f = (\text{sgn}\tau)Af$$

若 f 本身为可交换函数，则 $Af = \sum(\text{sgn}\sigma)\sigma f = \sum(\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\sigma)f = (k!)f$。
tensor product: 设 f 是一个 k-linear 的函数、g 是一个 l-linear 的函数，则定义他们的张量积是一个 (k+l)-linear 的函数 $f\otimes g$

$$(f\otimes g)(v_1,...,v_{k+l}) = f(v_1,...,v_k)g(v_{k+1},...,v_{k+l})$$

设 $e_1,...,e_n$ 是向量空间 V 的一组基，$\alpha^1,...,\alpha^n$ 是对偶空间 $V^\vee$ 的一组基，而 $<,>: V\times V\to\mathbb{R}$ 是一个 bilinear 映射，不妨设 $g_{ij}=<e_i,e_j>\in\mathbb{R}$，对于 $v=\sum v^ie_i, w=\sum w^ie_i$，则有

$$<v,w>=\sum v^iw^j<e_i,e_j>=\sum\alpha^i(v)\alpha^j(w)g_{ij}=\sum g_{ij}(\alpha^i\otimes\alpha^j)(v,w)$$

这种表示后续作为微分几何中向量空间的内积的描述。

1.11 The Wedge Product

wedge product(exterior product): 对于两个可交换的多线性函数 f 和 g，我们希望构造出新的可交换函数，对 $f\in A_k(V), g\in A_\ell(V)$，由于 f 和 g 均为

$$f\wedge g=\frac{1}{k!\ell!}A(f\otimes g)$$

更显式地表示

$$(f\wedge g)(v_1,...,v_{k+\ell})=\frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}(\text{sgn}\sigma)f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})g(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+\ell)})$$

简单说明系数 $1/k!\ell!$ 的作用，对于每一个重排序 σ，我们保持 g 中的系数不变，用 τ 打乱 f 中的参数，由于有 sgnσ 的存在，乱序的值和原值相等。

$$(\text{sgn}\sigma\tau)f(v_{\sigma\tau(1)},...,v_{\sigma\tau(k)})=(\text{sgn}\sigma\tau)(\text{sgn}\tau)f(v\sigma(1),...,v_{\sigma(k)})=(\text{sgn}\sigma)f(v\sigma(1),...,v_{\sigma(k)})$$

而这样的重复项对于每个 g 的排序都有 $k!$ 个，因此需要除以 $k!$，$\ell!$ 同理，因此我们可以用生序表示，即 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(k),\sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+\ell)$，称 $\sigma\in S_{k+\ell}$ 为 $(k,\ell)-$ shuffle，则将 $(k+\ell)!$ 项求和简化成 $C^k_{k+\ell}$ 项。

$$(f\wedge g)(v_1,...,v_{k+\ell})=\sum_{k,\ell}-\text{shuffles }\sigma(\text{sgn}\sigma)f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})g(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+\ell)})$$

Anticommutativity: 楔积是不可交换的，且满足 $f\in A_k(V), g\in A_\ell(V)$，则有

$$f\wedge g=(-1)^{k\ell}g\wedge f$$

构造 τ 使得 $\tau(1)=k+1,...,\tau(\ell)=k+\ell,\tau(\ell+1)=1,...,\tau(\ell+k)=k$，则有

$$\begin{aligned}A(f\otimes g)(v_1,...,v_{k+\ell})&=\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}(\text{sgn}\sigma)f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})g(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+\ell)})\\&=\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}(\text{sgn}\sigma)f(v_{\sigma\tau(\ell+1)},...,v_{\sigma\tau(\ell+k)})g(v_{\sigma\tau(1)},...,v_{\sigma\tau(\ell)})\\&=(\text{sgn}\tau)\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}(\text{sgn}\sigma\tau)g(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+\ell)})f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})\\&=(\text{sgn}\tau)A(g\otimes f)(v_1,...,v_{k+\ell})\end{aligned}$$

两边除以 $k!\ell!$ 即得，此外当 f 的度为奇数时，则有 $f\wedge f=0$。
Associativity: 楔积是满足结合律的，即在实向量空间 V 下的多线性可交换函数 f,g,h，其度分别为 k,ℓ,m，则有

$$(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)$$

我们首先证明两个引理

(i) $A(A(f)\otimes g)=k!A(f\otimes g)$

(ii) $A(f \otimes A(g)) = \ell! A(f \otimes g)$

由定义得

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\text{sgn}\sigma)\sigma \left(\sum_{\tau \in S_k} (\text{sgn}\tau)(\tau f) \otimes g \right)$$

可以将 τ 认为是固定第 $k+1, ..., k+\ell$ 项的 $S_{k+\ell}$ 下的转置，从而有 $(\tau f) \otimes g = \tau(f \otimes g)$，从而有

$$A(A(f) \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \sum_{\tau \in S_k} (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)(\sigma\tau)(f \otimes g)$$

设 $\mu = \sigma\tau \in S_{k+\ell}$，在二次循环中，对于每一个 τ，$\sigma = \mu\tau^{-1}$ 必然出现在第一次循环中，因此复合的转置 μ 同样会出现一次，即重复了 $k!$ 次，有

$$A(A(f) \otimes g) = k! \sum_{\mu \in S_{k+\ell}} (\text{sgn}\mu)\mu(f \otimes g) = k! A(f \otimes g)$$

另一式同理，则有

$$\begin{aligned}
(f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{(k+\ell)!m!} A((f \wedge g) \otimes h) \\
&= \frac{1}{(k+\ell)!m!} \frac{1}{k!\ell!} A(A(f \otimes g) \otimes h) \\
&= \frac{(k+\ell)!}{(k+\ell)!m!k!\ell!} A((f \otimes g) \otimes h) \\
&= \frac{1}{k!\ell!m!} A((f \otimes g) \otimes h) \\
&= \frac{1}{k!\ell!m!} A(f \otimes (g \otimes h)) \\
&= f \wedge (g \wedge h)
\end{aligned}$$

上式可以进一步推广为多个可交换的多元线性函数的楔积，对于 $f_i \in A_{d_i}(V)$，有

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_r = \frac{1}{d_1! \cdots d_r!} A(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)$$

wedge product of 1-covectors: 如果 $\alpha^1, ..., \alpha^k$ 是一元的线性函数，则有

$$\begin{aligned}
(\alpha^1 \wedge \cdots \alpha^k)(v_1, ..., v_k) &= A(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)(v_1, ..., v_k) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn}\sigma) \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}) = \det[\alpha^i(v_j)]
\end{aligned}$$

graded: 一个在域 K 上的代数 A 被称为分级的如果满足 $A = \bigotimes_{k=0}^{\infty} A^k$，使得乘法映射将 $A^k \times A^\ell$ 映射到 $A^{k+\ell}$，$A = \bigotimes_{k=0}^{\infty} A^k$ 表示每一个非零元素可以唯一地表示成有限和

$$a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}$$

其中 $a_{i_j} \neq 0 \in A^{i_j}$，一个分级的代数 $A = \bigotimes_{k=0}^{\infty} A^k$ 被称为不可交换的 (anticommutative)，或者分级不可交换 (graded commutative) 如果对于任意 $a \in A^k, b \in A^\ell$ 有

$$ab = (-1)^{k\ell} ba$$

对于有限维的向量空间 V，有

$$A_*(V) = \bigotimes_{k=0}^{\infty} A_k(V) = \bigotimes_{k=0}^{n} A_k(V)$$

显然，楔积可以作为 multicovectors 的乘法，因此 $A_*(V)$ 变为不可交换的分级代数，并称为外部代数 (exterior algebra) 或者 Grassmann algebra。

1.12 k-Covectos basis

此处我们简单总结。

(i) 实向量空间 V 是一个封闭的空间，满足元素加法和标量乘法属于自身；

(ii) 在此基础上我们定义了多元线性函数 f 满足对于 V 中的任意元素，在自变量处的线性组合等于函数作用后的值的线性组合；

(iii) 对于那些将向量空间 V 映射到实数空间 $\mathbb{R}$ 的线性函数 $f : V \to \mathbb{R}$, 我们记其所组成的集合 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ 为向量空间的对偶空间，设 $e_1, ..., e_n$ 为一组基，则对偶空间的基为 $\alpha^1, ..., \alpha^n$。

(iv) 通过多元函数的乘法可以定义更多元函数 $A^k \times A\ell \to A^{k+\ell}$，将这些函数综合的集合表示为 $A = \bigotimes_{k=0}^{\infty} A^k$，其中任意一个非零元素可以唯一拆解为不同维度函数的和。

multi-index: 多索引的表示 $I = (i_1, ..., i_k)$，且写 $e^I = (e_{i_1}, ..., e_{i_k}), \alpha^I = \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}$，显然令多元索引 I, J 都是生序排列，则有 $\alpha^I(e_J) = \det[\alpha^i(e_j)]_{i \in I, j \in J} = \delta^I_J$，由于 α^i 都是一元函数，则是可交换线性函数，并且楔积的结果为可交换线性函数。

basis of $A_k(V)$: 所有可交换线性函数 α^I 组成了 $A_k(V)$ 的一组基，其中 I 是生序的。对于相互独立性设 $\sum c_I \alpha^I = 0$，分别作用 e_J，则有 $c_J = 0$ 即所有系数均为 0，对于任意函数 f，设 $g = \sum f(e_I)\alpha^I$，对于任意基 e_J，有

$$g(e_J) = \sum f(e_I)\alpha^I(e_J) = \sum f(e_I)\delta^I_J = f(e_J)$$

这说明对于任意元素 v，$f(v) = g(v)$，则说明两个函数相等，即 $f = \sum f(e_I)\alpha^I$，进一步说明 $A_k(V)$ 的空间维度是 C_n^k，若 $k > \dim(V)$，则 $A_k(V) = 0$(由于在 $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}$ 中存在两个相同的 i，由于 α^i 是一元函数，因此 $\alpha^i \wedge \alpha^i = 0$)。

参考文献

[1] Loring W Tu. Manifolds. In *An Introduction to Manifolds*, pages 47–83. Springer, 2011.